МАТЕМАТИЧКА ГИМНАЗИЈА

МАТУРСКИ РАД

ИЗ МАТЕМАТИКЕ

НАСУМИЧНО ШЕТАЊЕ ПО ГРАФОВИМА

Ученик **Ментор**

Јелена Мрдак, 4ц **Проф. др Бобан Маринковић**

Београд, јун 2015.

Апстракт

У овом раду су представљени графови и анализирано је шетање по њима. Уводи се појам матрице суседства и вероватноће и помоћу линеарне алгебре се изводе формуле које одређују број путева одређене дужине у неким графовима. Такође, дата је дефиниција n-димензионалне коцке и Радонове трансформације која се користи за одређивање броја путева дате дужине у тој коцки. Последње поглавље је посвећено насумичним шетањем по графовима.

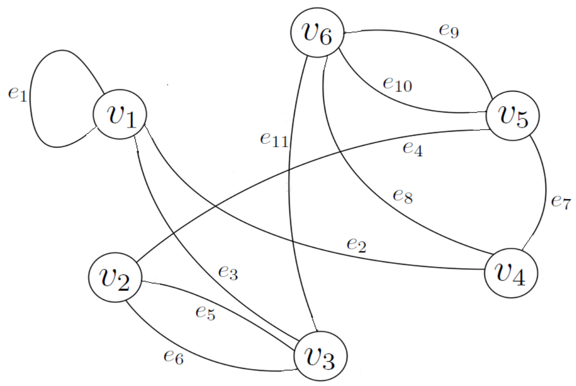
САДРЖАЈ

1 Шетање по графовима

За коначан скуп S и ненегативан цео број k, дефинишемо $\binom{S}{k}$ као скуп k-точланих подскупова скупа S. Мултискуп можемо посматрати као скуп у коме се елементи могу понављати и у коме редослед елемената није битан. За мултискуп M кажемо да је на скупу S ако сваки елемент скупа M припада скупу S. На пример, $M = \{1, 1, 2, 4, 2, 1\}$ је мултискуп на скупу $S = \{1, 3, 2, 4\}$. Са $\left(\binom{S}{k}\right)$ ћемо означити скуп k-точланих мултискупова на скупу S. На пример, ако је $S = \{1, 2, 3\}$, тада је (користећи краћи запис),

$$\binom{S}{2} = \{12, 13, 23\} \qquad \text{и} \qquad \left(\binom{S}{2}\right) = \{11, 22, 33, 12, 13, 23\}.$$

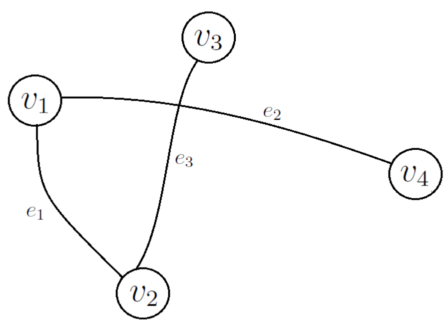
Дефиниција 1.1. *Граф је уређена тројка $G = (V, E, \varphi)$ коју чине скуп чворова $V = \{v_1, ..., v_p\}$, скуп грана $E = \{e_1, ..., e_q\}$ и функција $\varphi : E \to \left(\binom{V}{2}\right)$.*



Слика 1.1: Граф

Ако важи $\varphi(e) = \{u, v\}$ (или скраћено uv), тада грана e повезује чворове u и v и за те чворове кажемо да су суседни. Уколико више грана $e_1, ..., e_j$ $(j > 1)$ задовољава услов $\varphi(e_1) = \cdots = \varphi(e_j) = uv$, онда постоји **вишеструка грана** између чворова u и v. Ако важи $\varphi(e) = vv$, тада кажемо да је e **петља** чвора v.

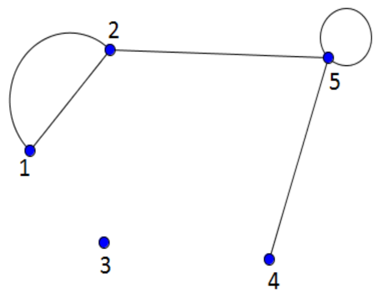
Дефиниција 1.2. *Прост граф је граф без петљи и вишеструких грана.*



Слика 1.2: Прост граф

Дефиниција 1.3. *Матрица суседства графа G је реална $p \times p$ матрица $A(G)$ чије поље (i, j) представља број грана између чворова i и j.*

Матрица суседства је симетрична, па, према томе, има све реалне сопствене вредности. Такође, њен траг представља број петљи у графу. Сада ћемо направити матрицу суседства $A(G)$ за граф на *Слици 1.3.*



$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Слика 1.3

Дефиниција 1.4. *Шетња по графу G дужине l од чвора u до чвора v је низ $v_1, e_1, v_2, e_2, ..., v_l, e_l, v_{l+1}$ у коме важи:*

- *свако v_i је чвор у графу G,*
- *свако e_i је грана у графу G,*
- *e_i је грана између чворова v_i и v_{i+1},*
- *$v_1 = u$ и $v_{l+1} = v$.*

Теорема 1.1. *Поље (i, j) матрице $A(G)^l$, где $l \in N$, представља број различитих шетњи дужине l од чвора v_i до чвора v_j.*

Доказ. Доказ је последица дефиниције множења матрица. □

Пример 1.1. Посматрајмо граф са *Слике 1.3.* Број различитих шетњи дужине 2 од чвора 5 до чвора 5 је $(A(G)^2)_{55}$.

$$A(G)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Дакле, постоје 3 различите шетње (5-5-5, 5-2-5, 5-4-5). ▲

Нас сада занима да ли постоји неки други начин за рачунање $(A(G)^l)_{ij}$. Присетимо се да свака реална симетрична $p \times p$ матрица има p линеарно независних реалних сопствених вектора који могу бити изабрани да буду ортонормални. Нека су $u_1, ..., u_p$ реални ортонормални сопствени вектори, а $\lambda_1, ..., \lambda_p$

одговарајуће сопствене вредности матрице M. Све векторе u ћемо посматрати као $p \times 1$ векторе колоне. Скаларни производ вектора u_i и u_j биће $u_i^t u_j$, што је, заправо, множење две матрице. Како су вектори ортонормални, следи $u_i \cdot u_j = u_i^t u_j = \delta_{ij}$ (Кронекер делта[1]). Нека је U матрица чије су колоне вектори $u_1, ..., u_p$.

$$U = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} u_{11} \\ u_{21} \\ \vdots \\ u_{p1} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} u_{12} \\ u_{22} \\ \vdots \\ u_{p2} \end{matrix}} & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \\ \\ \cdots \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} u_{1p} \\ u_{2p} \\ \vdots \\ u_{pp} \end{matrix}} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \quad & \uparrow \\ u_1 & u_2 & & u_p \end{array} \end{array}$$

Дакле, матрица U је ортогонална. Пошто су колоне матрице U линеарно независни вектори, закључујемо да је матрица U инвертибилна. Такође знамо да важи $U^t \cdot U = I$, а како је инверз јединствен, следи $U^{-1} = U^t$. Врсте матрице U^{-1} су $1 \times p$ вектори $u_1^t, ..., u_p^t$.

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} \boxed{u_{11} \quad u_{21} \quad \cdots \quad u_{p1}} \\ \boxed{u_{12} \quad u_{22} \quad \cdots \quad u_{p2}} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \boxed{u_{1p} \quad u_{2p} \quad \cdots \quad u_{pp}} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow u_1^t \\ \leftarrow u_2^t \\ \\ \leftarrow u_p^t \end{array}$$

Сада ћемо показати да матрица U дијагонализује матрицу M, тј. да важи:

$$U^{-1} M U = diag(\lambda_1, ..., \lambda_p),$$

где $diag(\lambda_1, ..., \lambda_p)$ означава дијагоналну матрицу са вредностима $\lambda_1, ..., \lambda_p$ на дијагонали редом.
Лева страна једнакости је $p \times p$ матрица чије су вредности поља $(i, i), 1 \leq i \leq p$

$$u_i^t \cdot M u_i = u_i^t \cdot (\lambda_i u_i) = \lambda_i (u_i^t \cdot u_i) = \lambda_i \cdot \delta_{ii} = \lambda_i,$$

а вредности поља $(i, j), i \neq j$

$$u_i^t \cdot M u_j = u_i^t \cdot (\lambda_j u_j) = \lambda_j (u_i^t \cdot u_j) = \lambda_j \cdot \delta_{ij} = 0.$$

Теорема 1.2. *Нека су v_i и v_j два чвора графа G и $\lambda_1, ..., \lambda_p$ сопствене вредности матрице суседства $A(G)$. Тада постоје реални бројеви $c_1, ..., c_p$ такви да за свако $l \geq 1$ важи:*

---

[1]**Кронекер делта**, названа по немачком математичару Леополду Кронекеру (1823 – 1891), јесте функција две променљиве која узима вредност 1 уколико су бројеви исти, а 0 ако нису.

$$(A(G)^l)_{ij} = c_1\lambda_1^l + \cdots + c_p\lambda_p^l.$$

Штавише, ако је U *реална ортонормална матрица таква да важи* $U^{-1}A(G)U = diag(\lambda_1, ..., \lambda_p)$, *тада је:*

$$c_k = u_{ik}u_{jk}.$$

Доказ. Сопствене вредности матрице $A(G)^l$ су $\lambda_1^l, ..., \lambda_p^l$. Одатле следи:

$$U^{-1}A(G)^lU = diag(\lambda_1^l, ..., \lambda_p^l).$$

Дакле,

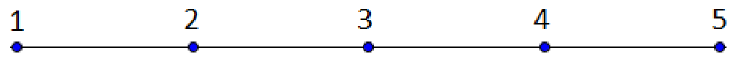
$$A(G)^l = U \cdot diag(\lambda_1^l, ..., \lambda_p^l) \cdot U^{-1}.$$

Користећи $U^{-1} = U^t$ добијамо:

$$(A(G)^l)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} u_{ik}\lambda_k^l u_{jk}.$$

□

Пример 1.2. Посматрајмо граф **G** са *Слике 1.4*.



Слика 1.4

Матрица суседства је:

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Сопствене вредности матрице $A(G)$ су:

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = -\sqrt{3} \text{ и } \lambda_5 = \sqrt{3},$$

а одговарајући сопствени вектори су:

$$u_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, u_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{bmatrix} \text{ и } u_5 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

Вектори u_1, u_2, u_3, u_4 и u_5 су ортонормални, па је

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

и важи $U^{-1} = U^T$.

Матрицу $A(G)^l$ можемо представити на следећи начин:

$$A(G)^l = U \cdot \begin{bmatrix} (-1)^l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0^l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1^l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-\sqrt{3})^l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\sqrt{3})^l \end{bmatrix} \cdot U^{-1}$$

Укупан број путева дужине 4 који почињу у чвору 1 и завршавају се у чвору 1 је:

$$(A(G)^4)_{11} = u_{11}\lambda_1^4 u_{11} + u_{12}\lambda_2^4 u_{12} + u_{13}\lambda_3^4 u_{13} + u_{14}\lambda_4^4 u_{14} = 2.$$

Слично добијамо и $(A(G)^4)_{22} = 5, (A(G)^4)_{33} = 6, (A(G)^4)_{44} = 5$ и $(A(G)^4)_{55} = 2$. Такође, можемо израчунати и укупан број путева дужине l из чвора i у чвор j. Урадићемо примере за $i = 4$.

$$(A(G)^l)_{41} = \frac{1}{4}(-1)^l - \frac{1}{4} - \frac{1}{4\sqrt{3}}(-\sqrt{3})^l + \frac{1}{4\sqrt{3}}(\sqrt{3})^l,$$

$$(A(G)^l)_{42} = -\frac{1}{4}(-1)^l - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(-\sqrt{3})^l + \frac{1}{4}(\sqrt{3})^l,$$

$$(A(G)^l)_{43} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}(-\sqrt{3})^l + \frac{1}{2\sqrt{3}}(\sqrt{3})^l,$$

$$(A(G)^l)_{44} = \frac{1}{4}(-1)^l + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(-\sqrt{3})^l + \frac{1}{4}(\sqrt{3})^l \quad \text{и}$$

$$(A(G)^l)_{45} = -\frac{1}{4}(-1)^l + \frac{1}{4} - \frac{1}{4\sqrt{3}}(-\sqrt{3})^l + \frac{1}{4\sqrt{3}}(\sqrt{3})^l.$$

▲

Да бисмо могли применити Теорему 1.2, морамо наћи сопствене вредности $\lambda_1, ..., \lambda_p$ и матрицу U. Међутим, то неће увек бити једноставно као у претходном примеру. Ипак, постоји један занимљив случај у ком није потребно наћи матрицу U. То је *затворена шетња*.

Дефиниција 1.5. *Затворена шетња графа G је шетња која почиње и завршава се у истом чвору.*

Укупан број затворених шетњи $f_G(l)$ графа G дужине l је:

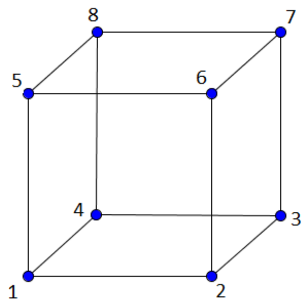
$$f_G(l) = \sum_{i=1}^{p} (A(G)^l)_{ii} = tr(A(G)^l),$$

где tr означава траг матрице. Сада, присетимо се да је траг квадратне матрице једнак збиру њених сопствених вредности. Као што смо већ напоменули, сопствене вредности матрице $A(G)^l$ су $\lambda_1^l, ..., \lambda_p^l$. Из претходног следи доказ следеће теореме.

Теорема 1.3. *Нека су $\lambda_1, ..., \lambda_p$ сопствене вредности матрице $A(G)$. Број затворених шетњи графа G дужине l је:*

$$f_G(l) = \lambda_1^l + \cdots + \lambda_p^l.$$

Пример 1.3. Са **G** ћемо означити коцку са *Слике 1.5.*



Слика 1.5: Коцка

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Сопствене вредности матрице $A(G)$ су:

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = -1, \lambda_5 = -1, \lambda_6 = 1, \lambda_7 = 1 \text{ и } \lambda_8 = -1.$$

Укупан број затворених шетњи дужине l је:

$$3^l + (-3)^l + 1^l + (-1)^l + (-1)^l + 1^l + 1^l + (-1)^l.$$

Ако је l непаран број, број затворених шетњи је нула. У случају да је l паран број, број затворених шетњи биће $2 \cdot 3^l + 6$. Из симетричности коцке следи да је број затворених шетњи дужине l из једног темена једнак:

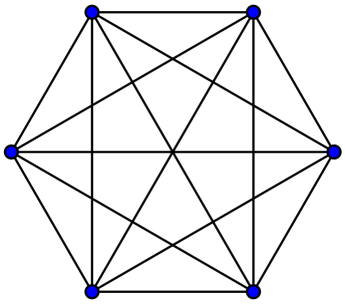
$$\frac{2 \cdot 3^l + 6}{8} = \frac{3^l + 3}{4}.$$

▲

Сада ћемо разматрати затворено шетање по *комплетном графу* K_p.

Дефиниција 1.6. *Комплетан граф* K_p *је прост граф код кога између свака два чвора постоји грана.*

Дакле, K_p има $\binom{p}{2} = \frac{1}{2}p(p-1)$ грана.



Слика 1.6: Комплетан граф K_6

Лема 1.1. *Нека је* J $p \times p$ *матрица чије су вредности поља 1. Тада су њене сопствене вредности* p *(многострукост један) и* 0 *(многострукост* $p-1$*).*

Доказ. Са $\alpha_1, ..., \alpha_p$ ћемо означити сопствене вредности матрице J. Како је матрица J реална и симетрична можемо је дијагонализовати одговарајућом ортогоналном матрицом U. Дакле, $J = U \cdot diag(\alpha_1, ..., \alpha_p) \cdot U^{-1}$. Користећи $rang(U) = rang(U^{-1}) = p$ и својства ранга добијамо:

$$\begin{aligned} rang(J) &= rang(U \cdot diag(\alpha_1, ..., \alpha_p) \cdot U^{-1}) \\ &= rang(U \cdot diag(\alpha_1, ..., \alpha_p)) \\ &= rang(diag(\alpha_1, ..., \alpha_p)). \end{aligned}$$

Из $rang(J) = 1$, закључујемо да је $p-1$ сопствених вредности једнако нула. Како је $tr(J) = p$, што је уједно и збир сопствених вредности, следи да је једна сопствена вредност једнака p. □

Лема 1.2. *Сопствене вредности матрице суседства комплетног графа* K_p *су -1 (многострукост* $p-1$*) и* $p-1$ *(многострукост један).*

Доказ. Матрица суседства графа K_p је $A(K_p) = J - I$, где је I јединична матрица $p \times p$. Ако су сопствене вредности матрице M $\alpha_1, ..., \alpha_p$, онда су сопствене вредности матрице $M + cI$ $\alpha_1 + c, ..., \alpha_p + c$. Доказ следи из Леме 1.1. □

Теорема 1.4. *Број затворених шетњи дужине* l *у комплетном графу* K_p *које почињу у чвору* v_i *је:*

$$(A(K_p)^l)_{ii} = \frac{1}{p}((p-1)^l + (p-1)(-1)^l).$$

Доказ. Користећи Теорему 1.3 и Лему 1.2, закључујемо да је укупан број затворених шетњи дужине l једнак $(p-1)^l + (p-1)(-1)^l$. Како је граф K_p симетричан, тј. број који тражимо не зависи од i, укупан број затворених шетњи дужине l треба поделити бројем чворова. □

2 Вишедимензионална коцка

Са $\mathbb{Z}_2$ ћемо означити цикличну групу реда 2 са елементима 0 и 1, а операцију групе ћемо дефинисати као сабирање по модулу 2. Дакле, $0+0=0, 0+1=1, 1+0=1$ и $1+1=0$. Дефинисаћемо групу $\mathbb{Z}_2^n$ као директан производ група $\mathbb{Z}_2$

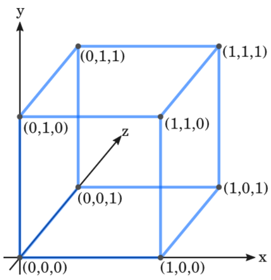
$$\mathbb{Z}_2^n = \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2}_{n},$$

а операција групе је сабирање по координатама по модулу 2. Елементи групе $\mathbb{Z}_2^n$ су n-торке $(a_1, ..., a_n)$, где $a_i \in \{0, 1\}$. На пример,

$$\mathbb{Z}_2^3 = \{(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1), (1,1,1)\}.$$

Нека је C_n граф чији је скуп чворова задат са $V(C_n) = Z_2^n$ и чворови u и v повезани ако се разликују у тачно једној компоненти. Дакле, n-торка $u+v$ има тачно једну ненула компоненту. Ако елементе групе $\mathbb{Z}_2^n$ посматрамо као реалне векторе, тада граф C_n представља n-димензионалну коцку.

Наш циљ је да нађемо сопствене вредности и векторе графа C_n. За то ћемо користити коначну Радонову трансформацију. Нека је ν скуп свих функција $f : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{R}$. Приметимо да је ν **векторски простор** над $\mathbb{R}$. Ако су $u = (u_1, ..., u_n)$ и $v = (v_1, ..., v_n)$ елементи групе $\mathbb{Z}_2^n$, дефинисаћемо скаларни производ као $u \cdot v = u_1v_1 + \cdots + u_nv_n \pmod 2$. Дакле, $u \cdot v \in \mathbb{Z}_2$. Израз $(-1)^{u \cdot v}$ је реалан број $+1$ или -1 у зависности да ли је $u \cdot v$ 0 или 1. Такође, можемо се уверити да важи $(-1)^{u\cdot(v+w)} = (-1)^{u\cdot v}(-1)^{u\cdot w}$.



Слика 2.1: C_3

Сада ћемо дефинисати две важне базе векторског простора ν. Прва база је B_1 коју чине функције $f_u, u \in \mathbb{Z}_2^n$ задате са:

$$f_u(v) = \delta_{uv}.$$

Дакле,

$$B_1 = (\underbrace{f_{(0,0,...,0)}, f_{(1,0,...,0)}, ..., f_{(1,1,...,1)}}_{2^n}).$$

Да бисмо утврдили да је B_1 база, потребно је да покажемо да су функције f_u линеарно независне и да свако $g \in \nu$ можемо представити преко функција f_u. Нека су $a_1, ..., a_{2^n}$ реални бројеви такви да важи $a_1 f_{(0,0,...,0)} + \cdots + a_{2^n} f_{(1,1,...,1)} = 0$ (0 је функција која сваки елемент домена слика у реалан број 0). Знамо да је $a_1 f_{(0,0,...,0)}((0,0,...,0)) + \cdots + a_{2^n} f_{(1,1,...,1)}((0,0,...,0)) = 0((0,0,...,0))$, тј. $a_1 \cdot 1 + \cdots + a_{2^n} \cdot 0 = 0$, следи $a_1 = 0$. Слично добијамо $a_1 = \cdots = a_{2^n} = 0$. Из претходног закључујемо да су функције f_u линеарно независне. Остаје још да $g \in \nu$ представимо као линеарну комбинацију функција f_u. Лако се види да је

$$g = \sum_{u \in \mathbb{Z}_2^n} g(u) f_u,$$

чиме смо показали да је B_1 база векторског простора ν. Такође, $dim\ \nu = dim\ B_1 = 2^n$.

Другу базу, B_2, чине елементи χ_u дефинисани на следећи начин:

$$\chi_u(v) = (-1)^{u \cdot v}.$$

Дакле,

$$B_2 = (\underbrace{\chi_{(0,0,\ldots,0)}, \chi_{(1,0,\ldots,0)}, \ldots, \chi_{(1,1,\ldots,1)}}_{2^n}).$$

Како је $\#B_2 = dim\ \nu$, довољно је показати да су вектори $\chi_u, u \in \mathbb{Z}_2^n$ линеарно независни. Заправо, ми ћемо показати да су они ортогонални. Прво ћемо дефинисати скаларни производ у ν као:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{u \in \mathbb{Z}_2^n} f(u) g(u).$$

Из претходног следи:

$$\begin{aligned} \langle \chi_u, \chi_v \rangle &= \sum_{w \in \mathbb{Z}_2^n} \chi_u(w) \chi_v(w) \\ &= \sum_{w \in \mathbb{Z}_2^n} (-1)^{(u+v) \cdot w}. \end{aligned}$$

Како $u \neq v$, закључујемо да $u + v \neq 0$, тј. да вектор $u + v$ има $k(\neq 0)$ јединица. Према томе, наша сума је:

$$\begin{aligned} \sum_{w \in \mathbb{Z}_2^n} (-1)^{(u+v) \cdot w} &= \binom{k}{0} 2^{n-k} - \binom{k}{1} 2^{n-k} + \cdots + (-1)^k \binom{k}{k} 2^{n-k} \\ &= 2^{n-k} \left(\binom{k}{0} - \binom{k}{1} + \cdots + (-1)^k \binom{k}{k} \right) \\ &= 2^{n-k} (1-1)^k = 0, \end{aligned}$$

чиме смо показали да су вектори χ_u ортогонални.

Сада уводимо дефиницију Радонове трансформације.

Дефиниција 2.1. *Нека је Γ подскуп од $\mathbb{Z}_2^n$ и нека функција $f \in \nu$, тада је функција $\Phi_\Gamma f \in \nu$, дефинисана са*

$$\Phi_\Gamma f(v) = \sum_{w \in \Gamma} f(v + w),$$

коначна Радонова трансформација од f на групи $\mathbb{Z}_2^n$ и подскупу Γ.

Управо смо дефинисали линеарну трансформацију, односно оператор $\Phi_\Gamma : \nu \to \nu$. Сада треба наћи сопствене вредности и векторе тог оператора.

Теорема 2.1. *Сопствени вектори од Φ_Γ су функције $\chi_u, u \in \mathbb{Z}_2^n$, а одговарајуће сопствене вредности су:*

$$\lambda_u = \sum_{w\in\Gamma}(-1)^{u\cdot w}.$$

Доказ. Нека $v \in \mathbb{Z}_2^n$. Тада важи:

$$\begin{aligned}\Phi_\Gamma\chi_u(v) &= \sum_{w\in\Gamma}\chi_u(v+w)\\ &= \sum_{w\in\Gamma}(-1)^{u\cdot(v+w)}\\ &= \left(\sum_{w\in\Gamma}(-1)^{u\cdot w}\right)(-1)^{u\cdot v}\\ &= \left(\sum_{w\in\Gamma}(-1)^{u\cdot w}\right)\chi_u(v).\end{aligned}$$

Дакле,

$$\Phi_\Gamma\chi_u = \left(\sum\nolimits_{w\in\Gamma}(-1)^{u\cdot w}\right)\chi_u.$$

□

Како свеки оператор на ν има $dim\ \nu = 2^n$ сопствених вредности и вектора, закључујемо да су χ_u сви сопствени вектори оператора Φ_Γ. Такође, приметимо да вектори χ_u не зависе од Γ, док сопствене вредности λ_u зависе од Γ.

Нека је $\triangle = \{\delta_1, ..., \delta_n\}$, где је δ_i вектор чија је i-та координата 1, а остале су 0. Са $[\Phi_\triangle]$ ћемо означити матрицу линеарне трансформације $\Phi_\triangle : \nu \to \nu$ за базу B_1.

Теорема 2.2. *Матрица $[\Phi_\triangle]$ је једнака матрици суседства $A(C_n)$ n-димензионалне коцке.*

Доказ. Нека $v \in \mathbb{Z}_2^n$. Користећи $u = v + w$ акко $u + w = v$ добијамо:

$$\begin{aligned}\Phi_\triangle f_u(v) &= \sum_{w\in\triangle} f_u(v+w)\\ &= \sum_{w\in\triangle} f_{u+w}(v).\end{aligned}$$

Односно,

$$\Phi_\triangle f_u = \sum_{w\in\triangle} f_{u+w}.$$

Из претходног добијамо вредност поља (i, j) матрице $[\Phi_\triangle]$.

$$(\Phi_\triangle)_{ij} = \begin{cases}1, & \text{ако } i+j \in \triangle,\\ 0, & \text{ако } i+j \notin \triangle.\end{cases}$$

Услов $i + j \in \triangle$ је испуњен акко се вектори i и j разликују у тачно једној координати, што је уједно и услов да ij буде страница графа C_n. $\square$

Теорема 2.3. *Сопствени вектори* $E_u, u \in \mathbb{Z}_2^n$ *матрице* $A(C_n)$ *су дати са:*

$$E_u = \sum_{v \in \mathbb{Z}_2^n} (-1)^{u \cdot v} v.$$

Одговарајуће сопствене вредности су:

$$\lambda_u = n - 2\omega(u),$$

где је $\omega(u)$ *број јединица у* u.

Доказ. Произвољну функцију $g \in \nu$ можемо представити преко базе B_1

$$g = \sum_{v \in \mathbb{Z}_2^n} g(v) f_v.$$

Ако g заменимо са χ_u добићемо вектор χ_u као линеарну комбинацију функција f_v,

$$\chi_u = \sum_{v \in \mathbb{Z}_2^n} \chi_u(v) f_v = \sum_{v \in \mathbb{Z}_2^n} (-1)^{u \cdot v} f_v.$$

Како $\Phi_\triangle$ има исту матрицу за базу B_1 као $A(C_n)$ за чворове v графа C_n, следи да су коефицијенти који стоје уз f_v вектора χ_u једнаки коефицијентима који стоје уз v вектора E_u. Према томе,

$$E_u = \sum_{v \in \mathbb{Z}_2^n} (-1)^{u \cdot v} v.$$

Из Теореме 2.1 имамо:

$$\lambda_u = \sum_{w \in \triangle} (-1)^{u \cdot w}.$$

Знамо да је $u \cdot \delta_i$ једнако 1 ако је i-та координата вектора u једнака 1, а 0 у супротном. Закључујемо да наша сума има $n - \omega(u)$ чланова једнаких $+1$ и $\omega(u)$ чланова једнаких -1, па је $\lambda_u = n - 2\omega(u)$. $\square$

Сада долазимо до кључног дела овог поглавља.

Теорема 2.4. *Нека* $u, v \in \mathbb{Z}_2^n$ *и нека је* $\omega(u + v) = k$. *Број шетњи од чвора* u *до чвора* v *дужине* l *у графу* C_n *је:*

$$(A(G)^l)_{uv} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \binom{n-k}{i-j} (n-2i)^l, \tag{1}$$

где је $\binom{n-k}{i-j} = 0$ *ако је* $i - j > n - k$. *Такође,*

$$(A(G)^l)_{uu} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (n-2i)^l. \tag{2}$$

Доказ. Нека су E_u и λ_u дефинисани као у Теореми 2.3. Да бисмо применили Теорему 1.2, потребно је да интензитет вектора E_u буде 1 и да вектори E_u буду међусобно нормални (посматрајући B_1 као ортонормалну базу векторског простора ν). Вектори E_u јесу међусобно нормални јер су то и вектори χ_u. Из Теореме 2.3 следи

$$|E_u|^2 = \sum_{v \in \mathbb{Z}_2^n} ((-1)^{u \cdot v})^2 = 2^n.$$

Дакле, векторе E_u треба заменити са $E_u^{'} = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} E_u$ да бисмо добили ортонормалне векторе. Сада можемо применити Теорему 1.2:

$$(A(G)^l)_{uv} = \frac{1}{2^n} \sum_{w \in \mathbb{Z}_2^n} E_{uw} \lambda_w^l E_{vw}.$$

Према дефиницији, E_{uw} је коефицијент уз f_w, тј. $E_{uw} = (-1)^{u \cdot w}$, а $\lambda_w = n - 2\omega(w)$. Према томе,

$$(A(G)^l)_{uv} = \frac{1}{2^n} \sum_{w \in \mathbb{Z}_2^n} (-1)^{(u+v) \cdot w} (n - 2\omega(w))^l.$$

Број вектора w таквих да је $\omega(w) = i$ и који имају j заједничких јединица са $u + v$ је $\binom{k}{j}\binom{n-k}{i-j}$. Користећи $(u + v) \cdot w \equiv j \pmod 2$, из претходне суме добијамо (1), а ако је испуњен услов $u = v$, онда из (1) следи (2). $\square$

Пример 2.1. Нека је n новчића окренуто писмом на горе. Насумично се бира један новчић (са вероватноћом $\frac{1}{n}$) и окреће се. Поступак се понавља l пута. Која је вероватноћа да ће после тих l окретања сви новчићи бити окренути писмом на горе?

Да бисмо решили овај проблем, користићемо n-димензионалну коцку. Писмо ћемо означити са 0, а главу са 1. Дакле, наше почетно стање је вектор $\underbrace{(0, 0, ..., 0)}_{n}$. Уколико окренемо први

новчић, наћи ћемо се у чвору $(1, 0, ..., 0)$. Окретање i-тог новчића је заправо мењање i-те координате вектора. Проблем новчића можемо посматрати на следећи начин: Кренувши из чвора $(0, 0, ..., 0)$ ($\mathbf{0}$ вектор) n-димензионалне коцке, колика је вероватноћа да ћемо се после l насумичних корака поново наћи у том чвору?

На основу Теореме 2.4, знамо да укупан број затворених путева из чвора $(0, 0, ..., 0)$ износи

$$\frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (n - 2i)^l.$$

Како су сви путеви једнако вероватни, а укупан број путева дужине l је n^l, следи да је тражена вероватноћа једнака:

$$P = \frac{\frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(n-2i)^l}{n^l}.$$

▲

3 Насумично шетање по графу

Нека је G коначан граф и нека се ми налазимо у неком чвору u тог графа. Можемо направити корак тако што одаберемо неки чвор који је суседан чвору u са вероватноћом $\frac{1}{k}$ где је k степен чвора u. Насумична шетња по графу G дужине l подразумева l таквих насумичних корака. Постоје многа занимљива питања у вези са насумичним шетњама, као на пример, колика је вероватноћа да се после l корака нађемо у чвору из ког смо кренули.

Дефиниција 3.1. *Матрица вероватноће графа G, $M(G)$, јесте матрица чије су врсте и колоне индексиране скупом чворова $\{v_1, ..., v_p\}$ графа G и при том важи*

$$(M(G))_{uv} = \frac{\mu_{uv}}{d_u},$$

где је μ_{uv} број грана између u и v, а d_u степен чвора u.

Дакле, $(M(G))_{uv}$ је вероватноћа да из чвора u дођемо у чвор v после једног корака. Слично као и за матрицу суседства, $(M(G)^l)_{uv}$ је вероватноћа да се после l корака нађемо у чвору v ако смо кренули из чвора u. Претпоставимо да не знамо у ком се чвору налазимо на почетку, већ нам је дат вектор $P = [\rho_{v_1}, ..., \rho_{v_p}]$ где је ρ_{v_i} вероватноћа да се налазимо у чвору v_i. Тада је $PM^l = [\sigma_{v_1}, ..., \sigma_{v_p}]$, где је σ_{v_i} вероватноћа да се после l корака нађемо у чвору v_i. Слично као и у претходном делу, занимају нас сопствене вредности и вектори матрице $M(G)$.

Разматраћемо специјалан случај када је граф G регуларан степена d (сваки чвор тог графа је степена d). Лако се види да важи $M(G) = \frac{1}{d}A(G)$, тј. сопствени вектори матрице $M(G)$ и $A(G)$ су исти, а сопствене вредности се односе као $\lambda_u(M) = \frac{1}{d}\lambda_u(A)$.

Пример 3.1. Посматрајмо насумично шетање по графу C_n које почиње у вектору $(0, 0, ..., 0)$. Колика је вероватноћа p_l да се после l корака вратимо на почетак?

Лако се закључује да је $p_l = 0$ ако је l непарно. Приметимо да је граф C_n регуларан степена n. Према томе:

$$\lambda_u(M(C_n)) = \frac{1}{n}(n - 2\omega(u)).$$

Користећи Теорему 2.4, добијамо:

$$p_l = \frac{1}{2^n n^l}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(n-2i)^l.$$

$\blacktriangle$

Важно је напоменути да иако матрица M није увек симетрична, она има само реалне сопствене вредности.

Теорема 3.1. *Нека је G коначан граф. Матрица вероватноће $M = M(G)$ дијагонализабилна и има само реалне сопствене вредности.*

Доказ. Претпоставићемо да је граф G повезан и да има бар два чвора. Следи, $d_v > 0$ за сваки чвор v графа G. Нека је D дијагонална матрица чије су врсте и колоне индексиране чворовима графа G и важи $D_{vv} = \sqrt{d_v}$. Имамо:

$$\begin{aligned}(DMD^{-1})_{uv} &= \sqrt{d_u} \cdot \frac{\mu_{uv}}{d_u} \cdot \frac{1}{\sqrt{d_v}} \\ &= \frac{\mu_{uv}}{\sqrt{d_u d_v}}.\end{aligned}$$

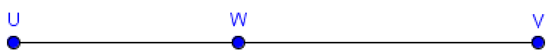
Дакле, DMD^{-1} је симетрична матрица, па према томе има само реалне сопствене вредности. Како сличне матрице имају исти карактеристичан полином, следи да морају имати и исте сопствене вредности. Одатле следи да матрица M има само реалне сопствене вредности. Како је матрица DMD^{-1} симетрична, она је дијагонализабилна, а пошто је матрица M слична матрици DMD^{-1}, следи да је и M дијагонализабилна. $\square$

Сада ћемо на још једном примеру видети примену линеарне алгебре у насумичном шетању по графу. Нека су u и v два чвора повезаног графа G. Са $H(u, v)$ ћемо означити очекивани број корака потребан да из чвора u насумичним шетањем по графу G први пут стигнемо у чвор v. Дакле, ако је p_n вероватноћа да први пут дођемо у v после n корака, тада, по дефиницији математичког очекивања имамо:

$$H(u, v) = \sum_{n \geq 1} n p_n.$$

У даљем раду ћемо видети да ова сума увек конвергира. Приметимо да важи $H(v, v) = 0$.

Пример 3.2. Посматрајмо граф G са Слике 3.1.



Слика 3.1: Граф G

Можемо израчунати $H(u, v)$ на следећи начин: после једног корака бићемо у чвору w, затим, са вероватноћом $\frac{1}{2}$ ћемо се наћи у чвору v и слично, са вероватноћом $\frac{1}{2}$ ћемо се вратити назад у u. Према томе,

$$H(u, v) = \tfrac{1}{2} \cdot 2 + \tfrac{1}{2}(2 + H(u, v)).$$

Решавањем једначине добијамо $H(u, v) = 4$. ▲

Желимо да нађемо формулу за $H(u, v)$. За то ћемо користити неке познате резултате о сопственим вредностима и векторима ненегативних матрица које ћемо навести без доказа. Реална $n \times n$ матрица B је *ненегативна* ако су све вредности њених поља ненегативне.

Дефиниција 3.2. *Реална $n \times n$ матрица B је иредуцибилна ако је $n = 1$, или ако матрица јенака суми првих n степена матрице B нема ниједно поље чија је вредност нула.*

На пример, матрица суседства $A(G)$ и матрица вероватноће $M(G)$ су иредуцибилне акко граф G има више од једног чвора и ако је повезан. Сада ћемо без доказа навести скраћени облик *Перон-Фробенијусове теореме* [2].

Теорема 3.2. *Нека је B ненегативна иредуцибилна матрица. Ако је ρ највећа апсолутна вредност сопствених вредности матрице B, тада је $\rho > 0$ и постоји сопствена вредност која је једнака ρ. Шта више, постоји сопствени вектор који одговара ρ чије су координате позитивне.*

Нека је M матрица вероватноће. Са $M[v]$ ћемо означити матрицу M која нема врсту и колону индексирану са v. Дакле, ако граф G има p чворова, тада је $M[v]$ $(p-1) \times (p-1)$ матрица. Са $T[v]$ ћемо означити вектор колоне дужине $p - 1$ чије су врсте индексиране чворовима $w \neq v$, где је $T[v]_w = \frac{\mu_{wv}}{d_w}$. И I_{p-1} је јединична матрица величине $p - 1$.

Теорема 3.3. *Матрица $I_{p-1} - M[v]$ је инвертибилна и*

$$H(u, v) = ((I_{p-1} - M[v])^{-2}T[v])_u,$$

и поље вектора $(I_{p-1} - M[v])^{-2}T[v]$.

Доказ. Вероватноћа да, кренувши из чвора u, после n корака нисмо посетили чвор v и да смо завршили у неком чвору w је $(M[v]^n)_{uw}$. Вероватноћа да се после једног корака из чвора w нађемо у чвору v је $\frac{\mu_{wv}}{d_w}$. Према дефиницији очекивања:

$$H(u, v) = \sum_{w \neq v} \sum_{n \geq 0} (n + 1) \frac{\mu_{wv}}{d_w} (M[v]^n)_{uw}. \tag{3}$$

Ако диференцирамо једнакост ($|x| < 1$)

$$\sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1 - x},$$

[2]**Перон-Фробенијусову теорему** су доказали немачки математичари Оскар Перон (1880-1975) и Фердинанд Џорџ Фробенијус (1849-1917).

добијамо

$$\sum_{n\geq 0}(n+1)x^n = (1-x)^{-2}. \tag{4}$$

Када бисмо ово применили на суму (3), добили бисмо:

$$\begin{aligned} H(u,v) &= \sum_{w\neq v}((I_{p-1}-M[v])^{-2})_{uw}\cdot\frac{\mu_{wv}}{d_w} \\ &= ((I_{p-1}-M[v])^{-2}T[v])_u. \end{aligned}$$

Међутим, потребно је да докажемо да се (4) може применити на (3). За произвољну $r\times r$ матрицу B, дефинисаћемо

$$\sum_{n\geq 0}(n+1)B^n = C,$$

ако важи

$$\sum_{n\geq 0}(n+1)(B^n)_{ij} = C_{ij}.$$

Индукцијом по m се лако проверава да следећа једнакост важи

$$(I_r-B)^2(I_r+2B+3B+\cdots+mB^{m-1}) = I_r-(m+1)B^m+mB^{m-1}. \tag{5}$$

Сада, претпоставимо да је матрица B дијагонализабилна и да све њене сопствене вредности $\lambda_1,...,\lambda_r$ задовољавају услов $|\lambda_i|<1$. Према томе,

$$(B^n)_{ij} = c_1\lambda_1^n+\cdots+c_r\lambda_r^n,$$

где су $c_1,...,c_r$ константе. Закључујемо да када $m\to\infty$, десна страна једнакости (5) тежи I_r, тј. $\sum_{n\geq 0}(n+1)B^n$ тежи $(I_r-B)^{-2}$ (што је уједно и доказ да је матрица I_r-B инвертибилна).

Остаје још да покажемо да је матрица $M[v]$ дијагонализабилна и да њене сопствене вредности имају апсолутну вредност мању од један. Дијагонализибилност матрице $M[v]$ се показује на исти начин као што је то урађено за матрицу M у Теореми 3.1. Дакле, треба доказати да све сопствене вредности $\theta_1,...,\theta_{p-1}$ матрице $M[v]$ задовољавају услов $|\theta_i|<1$. Желели бисмо да применимо Теорему 3.2 на $M[v]$, али не знамо да ли је она иредуцибилна, јер граф $G-v$ (граф G у којем је обрисан чвор v и све његове гране) не мора да буде повезан и да има више од једног чвора. Ако граф $G-v$ има повезане делове $H_1,...,H_m$, тада можемо уредити чворове графа $G-v$ тако да $M[v]$ има облик

$$M[v] = \begin{array}{c} \\ H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_m \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} H_1 & H_2 & \cdots & H_m \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} N_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & N_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & N_m \end{array}\right] \end{array}$$

где је свака матрица N_i иредуцибилна, или је 1×1 матрица $[0]$, што би значило да граф H_i има само један чвор. Сопствене вредности од $M[v]$ су сопствене вредности од N_i, $1 \leq i \leq m$. Треба да покажемо да свака сопствена вредност матрице N_i, за свако i у интервалу $[1, m]$, има апсолутну вредност мању од један. Ако је $N_i = [0]$, онда је то тривијално. Претпоставимо да $N_i \neq [0]$ и да граф H_i има k чворова ($k > 1$). Нека је ρ_i највећа сопствена вредност матрице N_i^T. Према Теореми 3.2, све сопствене вредности λ матрице N_i^T испуњавају услов $|\lambda| \leq \rho_i$. Са $U = [u_1, ..., u_k]$ ћемо означити сопствени вектор који одговара ρ_i. На основу Теореме 3.2, знамо да је свако $u_i > 0$. Посматраћемо U као вектор колоне. Нека је V вектор врсте дужине k чије су вредности 1. Посматрајмо производ матрица VN_i^TU. Са једне стране имамо

$$VN_i^TU = V(\rho_i U) = \rho_i(u_1 + \cdots + u_k),$$

а са друге,

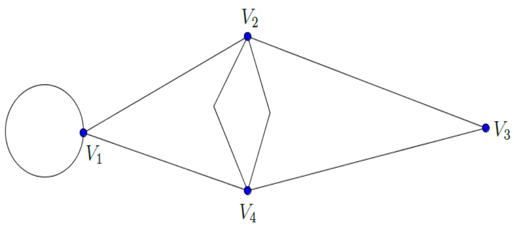
$$VN_i^TU = [\sigma_1, ..., \sigma_k]U = \sigma_1 u_1 + \cdots + \sigma_k u_k,$$

где је σ_i збир вредности i-те колоне матрице N_i^T. Сада, знамо да за свако σ_i важи $0 \leq \sigma_i \leq 1$, а за једно σ_h важи $\sigma_h < 1$, јер је граф G повезан. Како је свако $u_i > 0$, следи

$$VN_i^TU < u_1 + \cdots + u_k,$$

односно $\rho_i < 1$. Према томе, за сопствене вредности θ матрице $M[v]$ важи $|\theta| < 1$. □

Пример 3.3. Посматрајмо граф G са *Слике 3.2.*



Слика 3.2: Граф G

Користећи претходну теорему, израчунаћемо очекивани број корака да из чвора v_4 први пут стигнемо у остале чворове. Матрица вероватноће је задата на следећи начин:

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}.$$

Избацивањем четврте врсте и колоне добијамо:

$$M[v_4] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Дакле,

$$I_3 - M[v_4] = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix},$$

односно

$$(I_3 - M[v_4])^{-2} = \begin{bmatrix} \frac{55}{16} & \frac{13}{6} & \frac{17}{24} \\ \frac{13}{8} & \frac{7}{3} & \frac{11}{12} \\ \frac{17}{16} & \frac{11}{6} & \frac{13}{8} \end{bmatrix}.$$

Према дефиницији

$$T[v_4] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

следи

$$(I_3 - M[v_4])^{-2} T[v_4] = \begin{bmatrix} \frac{31}{12} \\ \frac{13}{6} \\ \frac{25}{12} \end{bmatrix}.$$

На основу Теореме 3.3, $H(v_1, v_4) = \frac{31}{12}, H(v_2, v_4) = \frac{13}{6}$ и $H(v_3, v_4) = \frac{25}{12}$. ▲

Литература

[1] Richard P. Stanley, *Algebraic Combinatorics*, Springer, New York, 2013

[2] Sheldon Axler, *Linear algebra done right*, Springer, New York, 1997